— Прошу повторять точный текст,— сказала она (Сова), словно не обратив внимания на то, что сказал Кролик.
— Да там было написано: “*Ушол щасвирнус*”. То же самое, что и здесь, только здесь ещё добавлено: “*Занит щасвирну тензор*”.
Сова с облегчением вздохнула.
— Ну вот,— сказала Сова,— Кристофер Робин сворачивает тензоры, изучая СТО.

В СТО5 была такая фраза:
*«Во-вторых, нам нужно определиться с тем, будем ли использовать для свёртки матрицу Грама или б-матрицу. Как мы узнаем из СТО7, что-то хорошее мы получим, если будем использовать одну из двух альтернатив».*
Пришло время поговорить об этом поподробнее, а заодно разобраться наконец-то с верхними и нижними индексами.

Итак, есть верхние 4-векторы:

$$p^0, p^1, p^2, p^3$$

А есть нижние:

$$p_0, p_1, p_2, p_3$$

Это ***разные (!!!) 4-векторы!***
***Нулевые компоненты у них совпадают, а остальные противоположны:***

$$p^0 = p_0, p^1 = -p_1, p^2 = -p_2, p^3 = -p_3$$

***Физический смысл имеет всегда вектор с ВЕРХНИМИ индексами!!!***

$$p^0, p^1, p^2, p^3$$

Т.е. если мы экспериментально измерим энергию и импульс, то мы получим именно верхний 4-вектор.

А нафига тогда нужен нижний?
По большому счёту не нужен особо. Ну, с его помощью можно свёртку 4-вектора чуть красивее записать. Мы ранее её писали как

$$p^0p^0 - p^1p^1 - p^2p^2 - p^3\, p^3$$

А используя нижний 4-вектор, можно записать

$$p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3$$

Или даже

$$\sum_{j=0}^{3} p^j p_j$$

Отдельные ушлые семинаристы не пишут знак суммы (пишут просто $p^j p_j$), ссылаясь на правило суммирования Эйнштейна. Суть правила Эйнштейна: ***автору, кто его использует, лень писать знак суммы, поэтому из авторской лени читателю будет сложнее читать*** ☺ Поэтому всегда пишите знак суммы.


Вот, кстати, вам мнемоническое правило, чтобы запомнить, какой из 4-векторов имеет физический смысл. Алёнушка-то наверху, а вот её отражение внизу ☺

Упражнение 1. Нижний 4-импульс какой-то там частицы второкура Широшанина на ядерном праке {200 МэВ, -100 МэВ, 30 МэВ; 0} (т.е. он движется в плоскости OXY). Найдите нижний 4-импульс.
Ответ: {200 МэВ, 100 МэВ, -30 МэВ; 0}.

Упражнение 2. Используя упр.1, найдите энергию покоя частицы в МэВ.
Ответ: 200 *200 – 100* 100 + 30*(-30)=29100, и из всего этого извлеч квадратный корень - $\sqrt{29100}$ (Мэв).

Можно провести аналогию с тангенсом и котангенсом. Котангенс не особо нужен, можно же обойтись тангенсом, однако котангенс также вводят – для симметрии. Здесь так же ☺

Теперь про двензоры. У нас три двензора э/м поля:

$$Щ^{ik}, Щ^{i}_{k}, Щ_{ik}$$

Они разные!!! Напомню их вид:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Когда использовать каждый из них?
Предположим, мы хотим свернуть двензор со столбцом.
Тогда, если мы используем один раз верхний, один раз нижний двензор, то свёртка запишется как

$$F^{i} = q\sum_{k=0}^{3} Щ^{i}_{k}\beta^{k}$$

Обратите внимание, где стоят индексы! Индекс k справа стоит один раз сверху, один раз снизу. i справа и слева в одном месте. Так должно быть всегда, иначе запись перестанет быть тензорной!

Вот так

$$F^{\boldsymbol{i}} = q \sum_{k=0}^{3} Щ_{\boldsymbol{i}k} \beta^k$$

или так

$$F^i = q \sum_{k=0}^{3} Щ^{i\boldsymbol{k}} \beta^{\boldsymbol{k}}$$

нельзя!!!

С 4-векторами, как вы помните, верхний был труъ, а нижний не труъ. С 4-двензорами труъ двензор – один раз верхний, один раз нижний. Он имеет смысл линейного оператора (а его матрица – матрица линейного оператора).

$Щ_{ik}$ или $Щ^{ik}$ же чисто вспомогательные. Как они связаны? С помощью метрического двензора:

$$Щ^i_k = \sum_{m=0}^{3} Щ^{im} g_{km}$$

$$Щ_{ik} = \sum_{m=0}^{3} Щ_i^m g_{km}$$

Упражнение читателю: найти, какие из предложенных уравнений записаны неверно:

$$(1) A^{ijk}_{prq} = B_{ijkp\,qr} + C^{ijkpqr}$$

$$(2) A^{il} = \sum_{k=0}^{3} B^{ik} C^{kl}$$

$$(3) A^{il} = \sum_{k=0}^{3} B^i_k C^{kl}$$

$$(4) A^{il}_t = \sum_{k=0}^{3} B^i_k C^{kl}_t$$

$$(5) A^i_t = \sum_{l=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} B^i_{kl} C^{kl}_t$$

$$(6) A_t^i = \sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} B_{kl}^i C_{tl}^k$$

Ответ: верно записаны (3)-(5).

Мне хотелось бы переписать многие из уже знакомых вам уравнений в тензорном виде:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Определение скорости | $v^i = \frac{\partial}{\partial T}\{ct, z^i\}$ | $v_i = \frac{\partial}{\partial T}\{ct, z_i\}$ | |
| Определение импульса | $p^i = mv^i$ | $p_i = mv_i$ | |
| 2 закон Ньютона | $\frac{\partial p_i}{\partial T} = F_i$ | $\frac{\partial p^i}{\partial T} = F_i$ | |
| Определение беты | $\beta_i = \frac{v_i}{c}$ | $\beta^i = \frac{v^i}{c}$ | |

Уравнение силы Лоренца-Кулона во всех возможных формах:

$$F_k = q\sum_i \text{Ш}_{ik}\beta^i = q\sum_i \text{Ш}_i^k \beta_i$$

$$F^k = q\sum_i \text{Ш}^{ik}\beta_i = q\sum_i \text{Ш}_i^k \beta^i$$

Теперь вы уверенно можете писать тензорные уравнения!